Canal ▶ El traductor de ingeniería

LÍMITES

Límite: estudio de TENDENCIA, estudia qué le pasa a una cierta magnitud cdo impongo una situacø extrema. Me aproximo a algo y veo qué pasa.

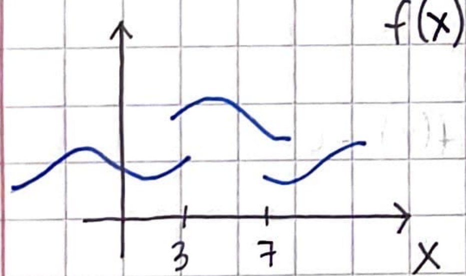
Es posible acercarse siempre y nunca llegar. ¿Cómo?

Arranco y me muevo la mitad de lo que queda

Puedo dar infinitos pasos y no llegar. ¿Cuándo llego?
EN EL LÍMITE

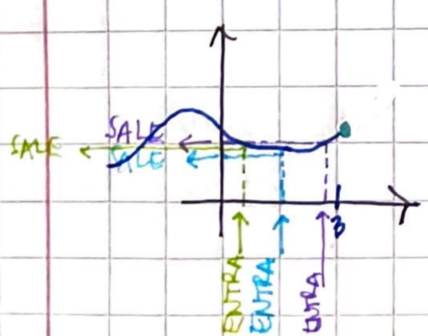
SIEMPRE ENTRE DOS N°S REALES DISTINTOS HABRÁ UNA CANTIDAD INFINITA DE NÚMEROS REALES

Esto es el corazón de la definiciø rigurosa de límite



El LÍMITE es un ANÁLISIS DE TENDENCIA

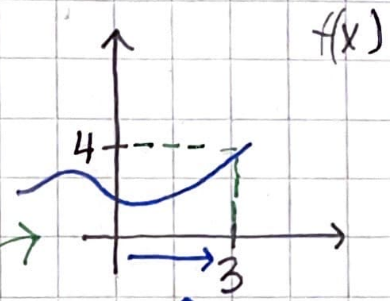
Qué le pasa a la funcø, qué valores devuelve la funcø cdo a la entrada le doy valores que tienden a un valor determinado.



A medida q' doy valores de entrada cercanos a 3 POR IZQ., la funcø TIENDE a devolver el valor del borde.

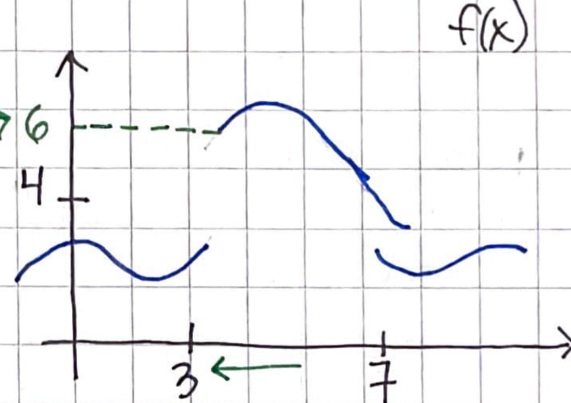
No interesa cuanto vale la func en 3 xq 3 es el extremo. Con límites analizo TENDENCIA, me estoy APROXIMANDO al 3.

Veo qué pasa cuando me voy aproximando a 3, no cuando llego a 3. NO interesa lo que pasa en el extremo



Cuando me aproximo a 3 la func tiende a devolver valores cercanos a 4 → POR IZQ.

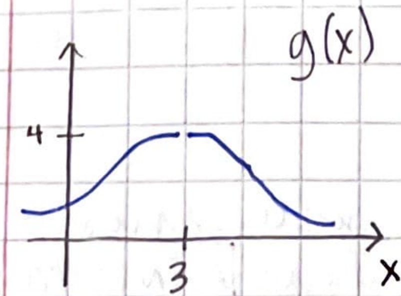
Si me acerco al 3 POR DER y doy valores de entrada (3,1 ; 3,01; 3,0001 etc) la func tiende a devolver el valor extremo, el borde

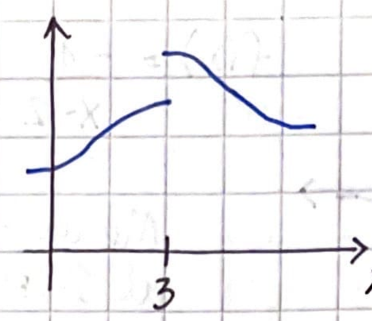


De manera informal:
El borde de la func a medida que los valores de entrada (x) tienden al 3 POR DERECHA el borde es 6.

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$$





Cuando me acerco x izq. tiende a devolver 4 y x der. también.

Cuando me acerco x izq. o por der. devuelve valores distintos

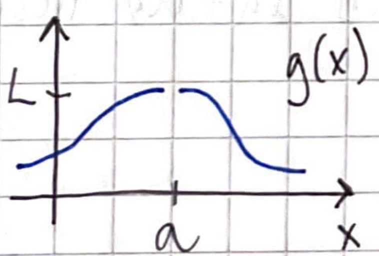
Sus límites laterales son coincidentes.

- $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 4$

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^+} g(x) = 4 \\ \lim_{x \to 3^-} g(x) = 4 \end{array}\right\} \lim_{x \to 3} g(x) = 4$$

SI GENERALIZAMOS



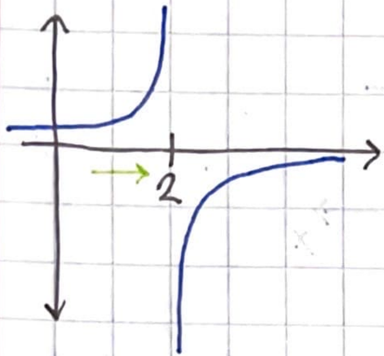
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^+} g(x) = L \\ \lim_{x \to a^-} g(x) = L \end{array}\right\} \lim_{x \to a} g(x) = L$$

ES UN Nº FINITO

Por dª da = q̀ x izq y ese resultado es finito EXISTE

Si L es finito podemos declarar que el límite existe

El límite NO EXISTE si al - 1 de los límites laterales no existe o si los límites laterales son distintos.



$$f(x) = \frac{-1}{x-2}$$

Me acerco con valores cercanos al 2 POR IZQ. hay una $\boxed{\text{ASÍNTOTA}}$ Cuando hay 2 de entrada la funø se rompe. 2 no está en el dominio (anula denom.)

Si divido al -1 con número muy chiquito (cercano a 2) la funø devuelve c/vez n.os + grandes.

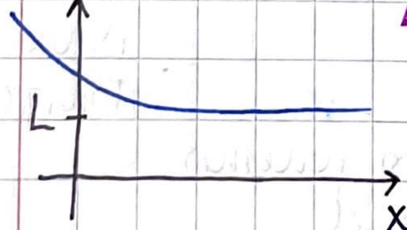
El denom. tiende a 0 por izq.

$$f(x) = \frac{-1}{x-2 \to 0^-}$$

Abajo n.º negat. tendiendo a 0 y arriba un -1, o sea, todo tiende a un n.º positivo y muy grande $\to \infty$

Cuando a la funø le doy valores de x cercanos a 2 por izq. la funø tiende a devolver infinito.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$$



ASÍNTOTA HORIZONTAL

El borde, lo que me tiende a devolver la funø cuando los valores de X tienden a ser muy grandes es L

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

→ LEYES DE LOS LÍMITES

$f(x)$ $\qquad$ $g(x)$

$\lim_{x\to a} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to a} g(x)$

Supongamos q' tengo esas 2 funciones y quiero saber qué les pasa cuando me acerco con x cercanos a a

Si esos límites existen (dan n°s finitos), la suma, división, producto, cociente entre esas funciones permite hacer la distributiva de los límites, CON CIERTOS CUIDADOS

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$$

OJO

El límite de la suma de estas funciones puede ser distinto de los límites de las funciones x separado.

Si los límites de f(x) y g(x) existen, en ese caso, el límite de la suma es la suma de los límites.

DEBEN EXISTIR POR SEPARADO

ESTO FUNCA P' SUMA, RESTA Y MULT.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

¿Y EL COCIENTE? Se puede, pero NO OLVIDAR que el denominador no puede ser 0

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \Rightarrow \neq 0$$

DISTRIBUTIVA

CONSTANTE

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Si tengo f(x) y el límite existe, entonces...

$$\lim_{x\to a}\left[cte \cdot f(x)\right] = cte \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

... Si armo una nva funciø, que es una $\boxed{\text{constante}}$ por la funø, el límite es igual a la constante multiplicando al límite de la funø

PRODUCTO

Para calcular el límite del $\boxed{\text{producto}}$ de $f(x) \cdot f(x)$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot f(x)\right] = \underbrace{\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{L} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{L}}_{L^2}$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot f(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^2$$

El límite

¿L qué es?

$\lim_{x\to a} f(x)$

Entonces puedo poner

GENERALIZANDO.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \ldots \text{n veces}\right] = L^n$$

Si pasa esto: f(x)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq \infty$$

RAÍZ

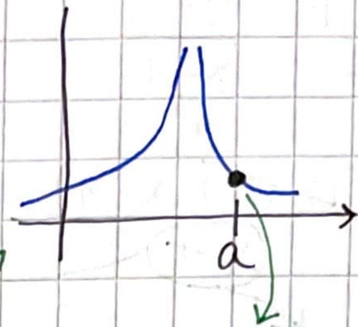
El límite de la $\boxed{\text{raíz}}$ de 1 funø es la raíz del límite de la funø

$$\lim_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)^{1/n}\right]$$

$$\lim_{x\to a}\left[fx\right]^{1/n}$$

Restricciø = $f(x) \geq 0$ si el índice es par.

Cuando tengo 1 fnø q' es cociente de polinomios, o es radical (raíces) y el a (el valor al que tiendo) está en el dominio de la fnø, o sea, es continua en a



La curva es continua en a.

Analizar la tendencia x izq. o der. me da lo mismo, es el punto

Allí sí puedo agarrar el valor extremo

¡¡OJO!! SOLO EN ESTOS CASOS.

Como la fnø es continua, al acercarme x izq. y der. tiendo al punto del extremo

Puedo evaluar la fnø en ese valor extremo p' encontrar el resultado del análisis de tendencia

Encontrar resultado de mi límite

Puedo evaluar la fnø en a.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x-3}$$

Dominio de la fnø: todo $\mathbb{R}$ menos el 3.

2 está en el dominio. Puedo evaluar en 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

El límite es -1

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x-1}}$$

Para cancelar $x-1$ tengo q̀ estar seguro que $x-1$ es distinto de 0.

$x-1$ TIENDE a 0, pero NO ES CERO porque el x se va a 1.

→ Entonces, puedo cancelar

Como no estoy evaluando en 1, sino los valores que tienden y el 1 es lo que anula el denom. puedo cancelar.

$$\lim_{x\to 1} x+1$$

Si x tiende a 1, todo tiende a 2 : $x+1$

$1+1=2$

El límite vale 2

→ TEOREMA DE LA COMPRESIÓN

En la medida q̀ me acerco a a si el límite de $f(x)$ coincide con el límite de $g(x)$, a la q̀ está contenida entre las 2 le pasará lo mismo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = L \\ \\ \lim_{x\to a} g(x) = L\end{array}\right\} \lim_{x\to a} h(x) = L$$

$$f(x) \geq h(x) \geq g(x)$$

Ejemplo: Determinar el límite

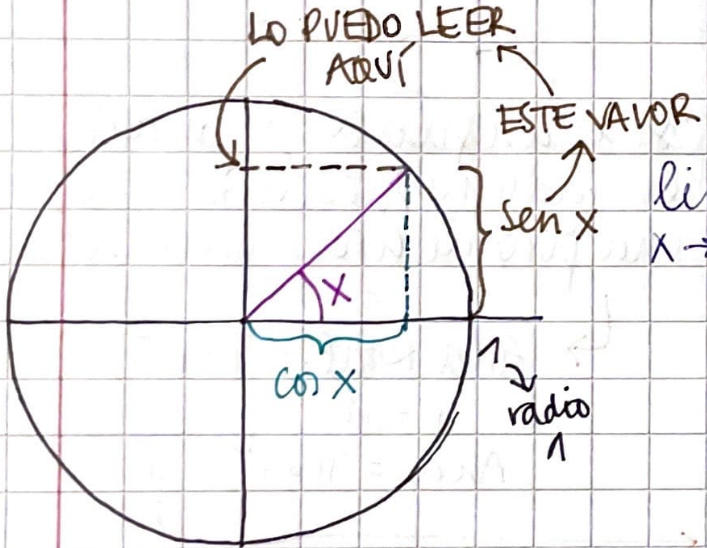
$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}$

Hay un cociente entre 2 funções.

En la medida en q̀ x tiende a 0 tanto numerador como denom. tienden a 0, pero tienden de forma distintas, porque son funções diferentes.

Este cociente puede dar 1 cosa u otra dependiendo de la forma en la q̀ numerador y denom. tienden a 0.

Demostraremos q̀ este límite vale 1.



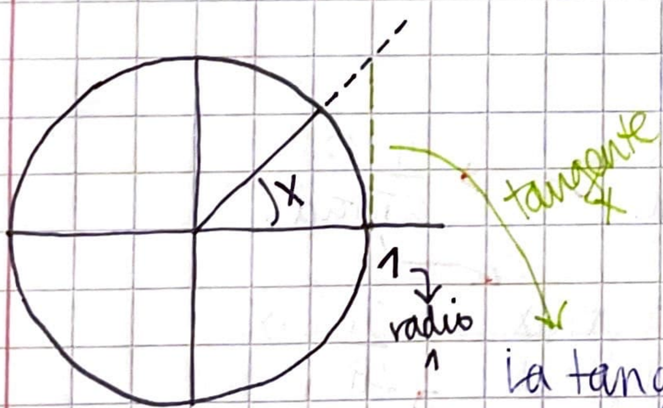
$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}$

Intenta probar que esto es h(x) [la funç q̀ estaba contenida, en ej. anterior]

Buscar una funç f(x) que esté por encima y una funç g(x) que este x debajo.

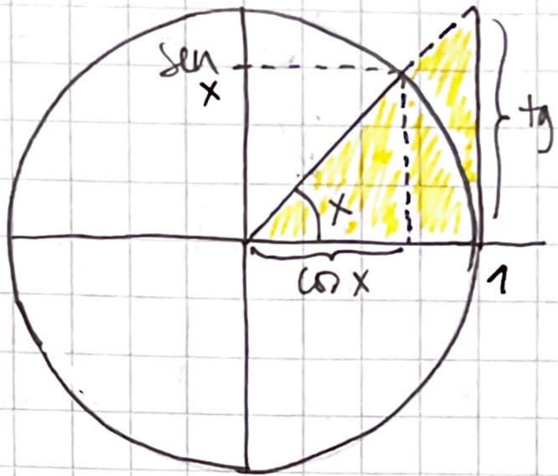
$\underbrace{g(x)}_{\downarrow} < \frac{\text{sen}}{x} < \underbrace{f(x)}_{\downarrow}$

Estos límites deben existir



la tangente se puede pensar como el valor de ordenada asociado a la prolongaç del segmento

Se pueden formar 3 figuras y calcular el area

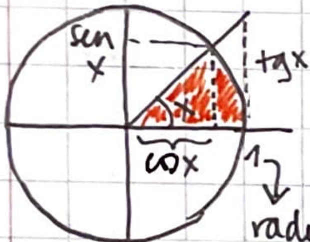


 tiene un area

$\frac{b \cdot h}{2}$

base = 1

h = altura = tg x = $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ = A_3



PORCIÓN DE CIRCUNFERENCIA

Si el angulo es x medido en radianes, ¿cuánto vale una porc de circunferencia?

Area total = $\pi \cdot r^2$

$r = 1$

Area = $\pi \cdot 1^2 = \pi$

Si el area total es π, lo divido por 360 grados tengo area de cada grado

Si lo divido por π radianes, tengo el area de cada radian

$\frac{\pi}{2\pi \text{ rad}}$

Si lo multiplico por x en radianes, tengo el area de la porcion

$\frac{\pi}{2\pi} \cdot x$

$A_2 = \frac{x}{2}$

Area $\frac{b \cdot h}{2}$

base = $\cos x$

h = $\operatorname{sen} x$

$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} = A_1$

A simple vista se ve que

$A_1 < A_2 < A_3$

$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen}}{2 \cdot \cos}$ $(\cdot 2)$

$\underbrace{\operatorname{sen} x \cdot \cos x < x}_{} < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

NO OLVIDAR LO Q QUIERO

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Hacer que sea h(x), la func entre otras 2

Necesito al medio $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$\operatorname{sen} x \cdot \cos x < x$

divido por x

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \cos x < \frac{x}{x}$

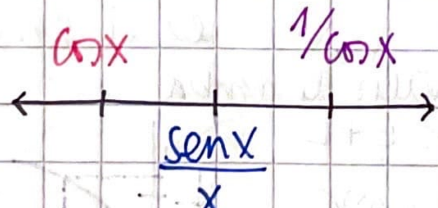
$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \cos x < 1$ / divido por $\cos x$

$\boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}}$

$x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ /divido x

$1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x}$ /mult. $x \cos x$

$\boxed{\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$



$\underbrace{\cos x}_{g(x)} < \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{h(x)} < \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f(x)}$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\text{tiende a } 1}$

El cociente tiende a 1

El límite vale 1

$g(x) < h(x) < f(x)$

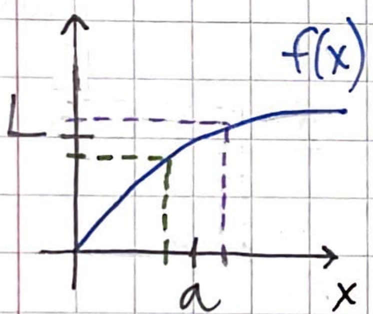
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

1 tb. tenderá a 1 1

Entonces,

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE



Lo que analizo es qué le pasa a la funø cuando x tiende a a.

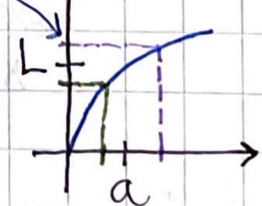
Si doy valores cercanos a a, la funø tiende a devolver valores cercanos a L.

Pero son valores distintos a L. Si los valores son ≠ y me quiero acercar a L, entonces

Tengo un error *

La diferencia entre esos valores y L es el error.

El valor de arriba es $\varepsilon + L$



Por ejemplo, asumimos q̃ error es 0,1. En gral es simétrico, 0,1 para arriba y p̃ abajo

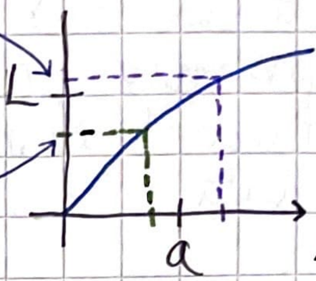
---

* el error se indica con ε → EPSILON

Si $\varepsilon = 0{,}1$
error $< \varepsilon$

Valor $L+\varepsilon$ arriba:

Valor $L-\varepsilon$ abajo:



Estoy pidiendo que la salida de la func f(x) MENOS ese valor L,

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

la distancia entre los valores que me devuelve la func en mi aproximac y L que es el valor L, el límite (valor final), quiero que sea MENOR que ε.

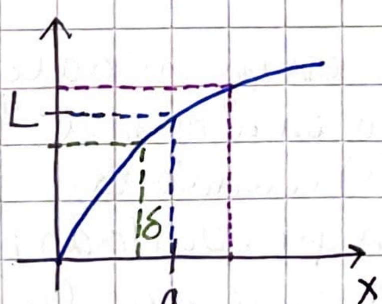
la distancia entre las aproximaciones y el límite es menor que el error ε.

Los modulos son distancias, siempre son positivos

$$0 < |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si se propuso una cota de error ε esos valores extremos asociados a la cota dependen, están relacionados con los valores de abscisa (eje x), que no necesariamente son simétricos.

Dependiendo de la forma de la func, a puede estar más o menos centrado.

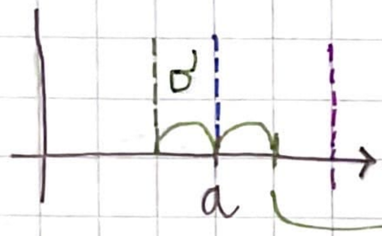


Lo que interesa es un intervalo de abscisa, centrado en a que garantice q' los valores de salida estén dentro de la cota de error.

δ

Elijo intervalo más chico, y eso es δ (delta) la distancia del x que uses en tu aproximaø y a, que es el valor central es menor que el delta

$0 < |x-a| < \delta$



Esto es una condiø que pongo a los x e implica que el intervalo asociado es centrado en a de longitud 2δ

Queda diferente: No importa, porque declaro un intervalo simétrico centrado en a, que garantiza q̀ valores de salida estén dentro de la cota de error

Para que el error sea lo + chico posible, el ε que elijo debe ser c/vez + chico para que la funø vaya tomando valores c/vez mas cercanos a L.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

la funø se va a terminar acercando a L si pasa que esto se cumple PARA TODO ε POSITIVO

$0 < |f(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0$

Dada una funø f(x) definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto en a misma, se dice que el límite de la funø f(x) cuando los valores de abscisa tienden a a da por resultado L si para toda cota de error positiva ocurre que la distancia entre los valores que devuelve la funø y esa L es menor que esa cota de error.

Tiene que existir un numero delta positivo de forma tal que también la distancia entre esos valores de abscisa y a sea menor que ese delta (y mayor que 0)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$0 < |x-a| < \delta$ de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$

FUNCIONES POLINÓMICAS

DOMINIO: Todo $\mathbb{R}$

RANGO: Según polinomio

↳ De grado 0 → Funciones constantes

$y = k \quad \in \mathbb{R}$

↳ De grado 1 → $y = ax + b \quad a \neq 0$ RECTAS EN EL PLANO

↳ De grado 2 → $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$ PARÁBOLAS

FUNCIONES RACIONALES: cociente polinomios

DOMINIO: $\mathbb{R}$ menos los que hacen 0 el denominador

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = \cos x$
} Periódicas de periodo 2π
DOMINIO: Todo $\mathbb{R}$
RANGO: $[-1$ y $1]$

$h(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
} Func periodica de periodo π
DOMINIO: Todo $\mathbb{R}$ menos ptos q' anulan denom $= \cos x$

$(2k-1)\frac{\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\cot = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

No están definidas cdo denom. se anula.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

FUNCIONES EXPONENCIALES $f(x) = a^x$ $a \in \mathbb{R}^+$

Creciente $a > 1$
Decreciente $0 < a < 1$

DOMINIO: $\mathbb{R}$
RANGO: $\mathbb{R}$ positivo siempre que $a \neq 1$
si $a = 1 \rightarrow$ rango $\{1\}$

PROPIEDADES DE LAS EXPONENCIALES

$\boxed{a^0 = 1}$

$\boxed{a^1 = a}$

$\boxed{a^{x} = \frac{1}{ax}}$

$\boxed{\begin{array}{c} a^{x+y} = a^x a^y \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{c} (ab)^x = a^x b^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^+ \end{array}}$

$\boxed{a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}}$

FUNCIONES HIPERBOLICAS

A partir de func exponencial con $a = e$, $f(x) = e^x$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

DOMINIO: $\mathbb{R}$

RANGO:

- ↳ $\operatorname{senh}(x)$: $\mathbb{R}$
- ↳ $\cosh(x)$: $[1, +\infty)$
- ↳ $\tanh(x)$: $(-1, 1)$

PROPIEDADES

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$

FUNCIONES A TROZOS

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \longrightarrow \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \longrightarrow \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS $f(x) = \log_a x$

INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $(g(x) = a^x)$

DOMINIO : $\mathbb{R}^+$
RANGO : $\mathbb{R}$

$a > 1$ creciente
$a < 1$ decreciente

Propiedades logaritmos

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$

$\log_a (xy) = \log_a (x) + \log_a (y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$\log_a (x^y) = y \log_a x$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$
$y \neq 0$

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

$\forall x, b \in \mathbb{R}^+$

DEFINICIÓN DE LÍMITE

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 /$ si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x-1} = 6$$

Primero sustituyo por 1 (x tiende a 1)

$$\frac{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4}{1-1} \quad \frac{2+2-4}{0} \quad \frac{0}{0}$$

→ NO SÉ LO QUE VALE 0/0
INDETERMINACIÓN

LA DEFINICIÓN DICE:

$\lim_{x \to a} f(x)$ $\quad a = 1$

$f(x) = \frac{2x^2+2x-4}{x-1}$

$L = 6$

Si para todo ε mayor que 0 existe delta, entonces se cumple que f(x) - L es menor que ε.

$$-\varepsilon < \frac{2x^2 + 2x - 4}{x-1} - 6 < \varepsilon$$

Empezamos por el final de la definición:
$|f(x) - L| < \varepsilon$
↓
El modulo de f(x) - L está entre -ε y ε

?
*

$$\frac{2(x+2)(x-1)}{x-1} - 6$$

$$2(x+2) - 6$$

$$2x + 4 - 6 = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$-\varepsilon < 2(x-1) < \varepsilon \quad / \div 2$$

$$-\varepsilon/2 < x - 1 < \varepsilon/2$$

$$\delta = \varepsilon/2$$

LÍMITES LATERALES

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Este límite existe, si

los laterales existen y son iguales

→ TEOREMA: UNICIDAD DEL LÍMITE

Si existe el límite de una funø en un punto, este es único.

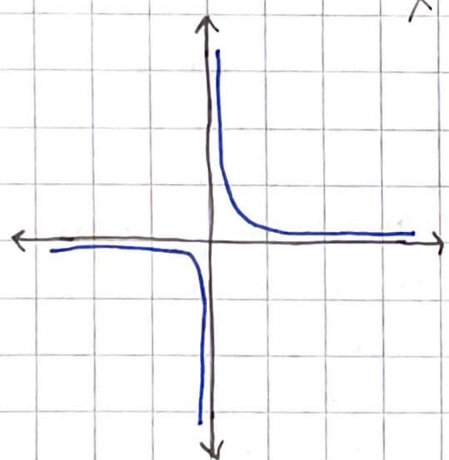
$\boxed{\text{CASO } \frac{K}{0}}$

Calcular límites laterales

Si coinciden, el límite existe

Si no coinciden, el límite NO existe

Ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0



Si me acerco a 0 por izq., va a $-\infty$ y por derecha $+\infty$

por tanto el límite no existe

CASO $\frac{0}{0}$ COCIENTE DE POLINOMIOS

Factorizar y Simplificar

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{1-x}$ 1º sustituyo

$\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ → indeterminación

↓

Factorizo

$\frac{(x+1)(x-1)}{1-x}$ → PUEDO MULT. POR -1 → $\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}}$ $\frac{x+1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = -2$

$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{-1} = -2$

CASO $\frac{0}{0}$ DIFERENCIA DE RAÍCES CUADRADAS

Se multiplica y divide por el conjugado

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ → sustituyo por 1 $\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}$ $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ → indeterminado

↓

Conjugado es cambiar el signo: $\sqrt{x}-1 \to \sqrt{x}+1$ ← mult. y divido por conjugado

$\boxed{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x}$

$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\ (\sqrt{x}+1)}$ $x + \cancel{\sqrt{x}} - \cancel{\sqrt{x}} - 1$ $\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

CASO $\frac{\infty}{\infty}$ REGLA LEIBNIZ

- Dividir numerador y denom. entre mayor potencia de x
- Si grado de num. es mayor que grado del denom. es $\pm\infty$
- Si grado del numer. es menor que grado del denom. es 0
- Si los grados son iguales, el resultado es el cociente de los coeficientes de la x de mayor grado

Ej. grado NUM > DENOM.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{1+2x} \quad \frac{3\cdot\infty^2+\infty+1}{1+2\cdot\infty} \approx \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x} = +\infty$$

Me quedo con mayor potencia del num. y denom.

Ej. grado DENOM > NUM

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2} = 0$$

Ej. grado IGUALES

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{5x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

CASO $\infty - \infty$

En polinomios el lim. es mas o menos ∞ según el signo del término de mayor grado.

En diferencia de funciones racionales se hacen las operaciones algebraicas (resta de fracciones) y se calcula lim.

En diferencia de raíces cuadradas se mult. y divide por conjugado

POLINOMIO → $\lim_{x \to \infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$

$\infty^3 = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$

$-\infty^3 = -\infty$

DIFERENCIA RAÍCES CUAD. → $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x = \infty - \infty$

$\infty^2 + \infty$

$\infty - \infty$

multiplico y divido x conjugado

$\sqrt{x^2+x} - x \rightarrow \sqrt{x^2+x} + x$

1º al cuadrado MENOS 2º al cuadrado

$$\frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$\frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Seguimos teniendo indeterm., pero ahora es cociente

↓

Leibniz

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

Dividir entre el de mayor orden

$\frac{x}{x} = 1$

¿?

$\frac{1}{2}$

* $\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x} = 1 + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x} + 2$

CASO $0 \cdot \infty$: Transformar mediante oper. algebraicas en otra indet. tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\infty^2 \left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty - 1} \right)$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \infty \cdot 0 = \text{INDETERMINADO}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)} = \frac{1(x-1) + x \cdot 1}{x(x-1)}$$ Hago la suma

$$\frac{(x-1) + x}{x^2 - x} = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{2x^3 - x^2}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Arriba grado 3
Abajo grado 2

* Preguntar resultado

$$\frac{2x^3}{x^2} = \infty$$

NUMERO e

e se define por siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

CASO 1^∞

Se calcula lim. con la fórmula

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - 1 \cdot g(x)\right]}$$

← Aprender

* $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{x-1} = 1^\infty \leftarrow *$$

APLICO FÓRMULA

$f(x) = \frac{x+2}{x}$

$g(x) = x-1$

$$e^{\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1\right] \cdot x-1}$$

$$\frac{x+2}{x} - \frac{1}{1} = \frac{x+2-x}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{(x-1)}{1} = \frac{2x-2}{x}$$

* $$e^{\lim_{x \to \infty} \frac{2x-2}{x}} = e^2$$

→ mayor coeficiente es 2